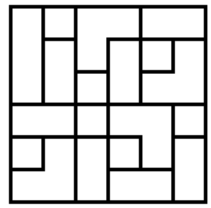
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2017/2018 год. Отборочный этап

Задачи для 5 класса

1. Покажите, как разрезать этот квадрат на четыре части одинаковой формы и размера, если резать можно только по проведённым линиям.



2. Существуют ли такие различные натуральные числа a и b, что a кратно b, $a+1$ кратно $b+1$, $a+2$ кратно $b+2$?

3. В магазине игрушек продаются синие автомобили, синие автобусы, синие корабли и зелёные поезда. Купив несколько игрушек, Рома обнаружил, что в его покупке половину синих игрушек составляют автомобили, а половину сухопутных транспортных средств — автобусы. Сколько кораблей купил Рома?

4. Оставшись дома один, Андрей прислушивался к каплям, которые через равные промежутки времени падали из почти закрытого крана, со звоном ударяясь о раковину. Между первым и предпоследним ударами прошло 48 минут, а между пятым и последним ударами — 44 минуты. Сколько всего ударов услышал Андрей?

5. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует трёхзначных хороших чисел без нуля в записи?

6. Прямоугольный лист 210 мм $\times$ 300 мм требуется разрезать без остатка на прямоугольники одинакового размера, у которых длина будет вдвое больше ширины. Какой может быть максимальная площадь одного такого прямоугольника? Докажите, что она максимальна.

7. Все существа на планете Пандора делятся на рыцарей (говорящих только правду), лжецов (говорящих только ложь) и животных (не говорящих ничего). Как-то раз семеро жителей Пандоры (А, Б, В, Г, Д, Е, Ж) произнесли по фразе.
   А: «Б и Г — лжецы».
   Б: «На Пандоре живут белые львы».
   В: «Среди нас семерых ровно два рыцаря».
   Г: «На Пандоре нет ни белых львов, ни зелёных тигров».
   Д: «Мы с А оба лжецы».
   Е: «На Пандоре больше зелёных тигров, чем золотых носорогов».
   Ж: «Среди нас семерых ровно 5 лжецов».
   Установите, есть ли на Пандоре золотые носороги.

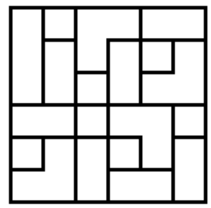
8. Род Собакиных основан неким Тимофеем Собакиным. Известно, что никто из мужчин этого рода не умирал до 30 лет. А ещё у каждого мужчины в этом роду было 2 или 3 сына, причём каждый сын рождался, когда отцу уже было 25 лет, но ещё не исполнилось 30. Сейчас в роду Собакиных 125 мужчин (не считая умерших). В каком веке родился Тимофей Собакин?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2017/2018 год. Отборочный этап

Задачи для 6 класса

1. Покажите, как разрезать этот квадрат на четыре части одинаковой формы и размера, если резать можно только по проведённым линиям.



2. В магазине игрушек продаются синие автомобили, синие автобусы, синие корабли и зелёные поезда. Купив несколько игрушек, Рома обнаружил, что в его покупке половину синих игрушек составляют автомобили, а половину сухопутных транспортных средств — автобусы. Сколько кораблей купил Рома?

3. Оставшись дома один, Андрей прислушивался к каплям, которые через равные промежутки времени падали из почти закрытого крана, со звоном ударяясь о раковину. Между первым и предпоследним ударами прошло 48 минут, а между пятым и последним ударами — 44 минуты. Сколько всего ударов услышал Андрей?

4. Можно ли в таблице из 5 строк и 6 столбцов разместить числа от 1 до 30 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом столбце сумма была меньше, чем в каждой строке?

5. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует четырёхзначных хороших чисел без нуля в записи?

6. Прямоугольный лист 210 мм $\times$ 297 мм требуется разрезать без остатка на прямоугольники одинакового размера, у которых длина будет вдвое больше ширины. Какой может быть максимальная площадь одного такого прямоугольника? Докажите, что она максимальна.

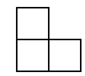
7. Род Собакиных основан неким Тимофеем Собакиным. Известно, что никто из мужчин этого рода не умирал до 30 лет. А ещё у каждого мужчины в этом роду было 2 или 3 сына, причём каждый сын рождался, когда отцу уже было 25 лет, но ещё не исполнилось 30. Сейчас в роду Собакиных 125 мужчин (не считая умерших). В каком веке родился Тимофей Собакин?

8. В одном парке есть бамбук, который каждую ночь с незапамятных времён становится выше на одну и ту же величину. Каждый день садовник отрезает от него целое количество метров так, чтобы оставшаяся часть имела высоту менее метра. Длину отрезанной части он записывает в специальную тетрадь.
а) Возможно ли, чтобы за десять последовательных дней в тетрадь были записаны (именно в этом порядке) десять таких чисел: $7, 7, 7, 6, 7, 7, 6, 7, 7, 7$?
б) А возможна ли такая последовательность: $7, 7, 7, 6, 7, 6, 7, 7, 6, 7$?
В каждом случае обоснуйте ответ.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2017/2018 год. Отборочный этап

Задачи для 7 класса

1. Покажите, как вырезать 12 трёхклеточных «уголков» (см. рисунок) из доски 8×8 так, чтобы из оставшейся части доски нельзя было вырезать больше ни одного уголка. Уголки можно поворачивать. 

2. Придумайте 7 различных натуральных чисел, сумма которых равна их наименьшему общему кратному.

3. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка E. Биссектрисы углов EAB и EAD пересекают стороны BC и CD в точках M и N соответственно. На луче AE отмечена такая точка F, что $AF = AB$. Докажите, что F лежит на прямой MN.

4. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует пятизначных хороших чисел без нуля в записи?

5. Медиантой двух несократимых дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ называется несократимая дробь, значение которой равно $\frac{m+p}{n+q}$. Пусть z — медианта для x и y, u — медианта для x и z, а v — медианта для y и z. Можно ли утверждать, что z — медианта для u и v?

6. В этой таблице 12 чисел закрасили в синий цвет, а другие 12 — в красный, причём сумма синих чисел в 4 раза больше, чем сумма красных. А какое число осталось незакрашенным?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

7. В одном парке есть бамбук, который каждую ночь с незапамятных времён становится выше на одну и ту же величину. Каждый день садовник отрезает от него целое количество метров так, чтобы оставшаяся часть имела высоту менее метра. Длину отрезанной части он записывает в специальную тетрадь.
а) Возможно ли, чтобы за десять последовательных дней в тетрадь были записаны (именно в этом порядке) десять таких чисел: $7, 7, 7, 6, 7, 7, 6, 7, 7, 7$?
б) А возможна ли такая последовательность: $7, 7, 7, 6, 7, 6, 7, 7, 6, 7$?
В каждом случае обоснуйте ответ.

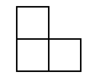
8. Квадратный лес разбит на миллион равных квадратов, в центре каждого из которых растёт дерево. Некоторые деревья можно спилить, тогда вместо них появляются пни. Говорят, что с одного пня можно увидеть другой, если на отрезке, соединяющем их, нет ни одного дерева (хотя на нём могут располагаться другие пни). Какое максимальное количество деревьев можно спилить, чтобы ни с одного пня нельзя было увидеть ни один другой пень? Считайте, что деревья и пни не имеют толщины.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2017/2018 год. Отборочный этап

Задачи для 8 класса

1. Покажите, как вырезать 12 трёхклеточных «уголков» (см. рисунок) из доски 8×8 так, чтобы из оставшейся части доски нельзя было вырезать больше ни одного уголка. Уголки можно поворачивать.



2. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка E. Биссектрисы углов EAB и EAD пересекают стороны BC и CD в точках M и N соответственно. На луче AE отмечена такая точка F, что $AF = AB$. Докажите, что F лежит на прямой MN.

3. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует шестизначных хороших чисел без нуля в записи?

4. В одной стране используются квадратные листы бумаги стандартных форматов, которые определяются так: «Лист K0 имеет сторону в 1 метр. Если в квадрат K0 вписать круг, а в него снова вписать квадрат, то этот второй квадрат будет иметь формат K1. Если вписать в K1 круг, а в него снова вписать квадрат, то получим лист формата K2. Аналогично определяются форматы вплоть до K10». Петя побывал в этой стране и купил там синий лист K0 и белые листы K1, K2, ..., K10 (всех по одной штуке). Сможет ли он разрезать белые листы на части, которыми полностью оклеит синий лист (с одной стороны)?

5. В этой таблице 12 чисел закрасили в синий цвет, а другие 12 — в красный, причём сумма синих чисел в 4 раза больше, чем сумма красных. А какое число осталось незакрашенным?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

6. Квадратный лес разбит на миллион равных квадратов, в центре каждого из которых растёт дерево. Некоторые деревья можно спилить, тогда вместо них появляются пни. Говорят, что с одного пня можно увидеть другой, если на отрезке, соединяющем их, нет ни одного дерева (хотя на нём могут располагаться другие пни). Какое максимальное количество деревьев можно спилить, чтобы ни с одного пня нельзя было увидеть ни один другой пень? Считайте, что деревья и пни не имеют толщины.

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} a\,(b - c + 1) = b^2 - bc + c, \\ b\,(c - a + 1) = c^2 - ca + a, \\ c\,(a - b + 1) = a^2 - ab + b. \end{cases}$$

8. Для каких $n > 1$ найдутся n различных натуральных чисел, сумма которых равна их наименьшему общему кратному?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2017/2018 год. Отборочный этап

Задачи для 9 класса

1. В магазине игрушек продаются синие автомобили, синие автобусы, синие корабли и зелёные поезда. Купив несколько игрушек, Рома обнаружил, что в его покупке половину синих игрушек составляют автомобили, а половину сухопутных транспортных средств — автобусы. Сколько кораблей купил Рома?

2. Медиантой двух несократимых дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ называется несократимая дробь, значение которой равно $\frac{m+p}{n+q}$. Приведите пример девяти несократимых дробей, каждая из которых, кроме двух крайних, служила бы медиантой для двух соседних с ней (в порядке возрастания).

3. Можно ли отметить на плоскости пять точек, не лежащих на одной прямой, так, чтобы расстояние между каждыми двумя из них выражалось целым числом?

4. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует семизначных хороших чисел без нуля в записи?

5. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом A. На сторонах AB и AC вовне $\triangle ABC$ построены равные остроугольные треугольники ABP и ACQ ($PB = AQ$). Прямые PB и CQ пересекаются в точке M. Докажите, что: а) $PA \perp QC$; б) $MA \perp PQ$.

6. Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Сколько решений имеет следующее уравнение?
$$S(n) + S^2(n) + \ldots + S^{2016}(n) = 2017^{2017}.$$
Здесь $S^2(n) = S(S(n))$, $S^3(n) = S(S^2(n))$, $S^4(n) = S(S^3(n))$ и т. д.

7. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} a\,(b-c+1) = b^2 - bc + c, \\ b\,(c-a+1) = c^2 - ca + a, \\ c\,(a-b+1) = a^2 - ab + b. \end{cases}$$

8. Точки числовой оси закрашены в 4 цвета. Соответствующие чётным числам — чёрные, нечётным — белые, на интервалах от чёрных к белым (по возрастанию) — красные, а на интервалах от белых к чёрным — синие. В стартовый момент времени два кузнечика находятся в разных точках A и B между 0 и 1. Через каждую единицу времени оба кузнечика совершают прыжок, удваивающий их координату (первый — в точки $2A$, $4A$, $8A$ и т. д., второй — в $2B$, $4B$, $8B$ и т. д.). Можно ли утверждать, что в некоторый момент времени кузнечики окажутся в точках, закрашенных в разные цвета?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017/2018 год. Отборочный этап

Задачи для 10 класса

1. Прямоугольный лист 210 мм $\times$ 300 мм требуется разрезать без остатка на прямоугольники одинакового размера, у которых длина будет вдвое больше ширины. Какой может быть максимальная площадь одного такого прямоугольника? Докажите, что она максимальна.

2. Можно ли отметить на плоскости пять точек, не лежащих на одной прямой, так, чтобы расстояние между каждыми двумя из них выражалось целым числом?

3. Все существа на планете Пандора делятся на рыцарей (говорящих только правду), лжецов (говорящих только ложь) и животных (не говорящих ничего). Как-то раз семеро жителей Пандоры (А, Б, В, Г, Д, Е, Ж) произнесли по фразе.
   А: «Б и Г — лжецы».
   Б: «На Пандоре живут белые львы».
   В: «Среди нас семерых ровно два рыцаря».
   Г: «На Пандоре нет ни белых львов, ни зелёных тигров».
   Д: «Мы с А оба лжецы».
   Е: «На Пандоре больше зелёных тигров, чем золотых носорогов».
   Ж: «Среди нас семерых ровно 5 лжецов».
   Установите, есть ли на Пандоре золотые носороги.

4. В игре «Что? Где? Когда?» используется круглый барабан, разбитый на 13 секторов. Изначально в каждом секторе лежит вопрос. Стрелка, вращаясь случайным образом, указывает с равной вероятностью на любой из секторов. В каждом раунде игры задаётся вопрос из сектора, указанного стрелкой; но если этот вопрос уже задан, то используется следующий по часовой стрелке незаданный.
   Пронумеруем вопросы по часовой стрелке от 1 до 13. Допустим, что после нескольких раундов заданы вопросы 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10. Для какого из оставшихся вопросов вероятность выпасть в одном из двух ближайших раундов максимальна? (Считайте, что ближайшие два раунда будут сыграны.)

5. Точка O — центр равностороннего треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки A и O, пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Докажите, что $AN = BM$.

6. Как меняется количество корней уравнения $x^2+p = \sqrt{x-p}$ в зависимости от значения параметра p?

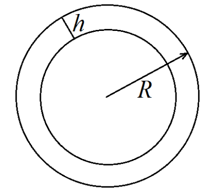
7. Точки числовой оси закрашены в 4 цвета. Соответствующие чётным числам — чёрные, нечётным — белые, на интервалах от чёрных к белым (по возрастанию) — красные, а на интервалах от белых к чёрным — синие. В стартовый момент времени два кузнечика находятся в разных точках A и B между 0 и 1. Через каждую единицу времени оба кузнечика совершают прыжок, удваивающий их координату (первый — в точки $2A$, $4A$, $8A$ и т. д., второй — в $2B$, $4B$, $8B$ и т. д.). Можно ли утверждать, что в некоторый момент времени кузнечики окажутся в точках, закрашенных в разные цвета?

8. Два вещественных числа a и b таковы, что $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$.
   Докажите, что $4a^2 + 4b^2 - ab \geqslant 30$.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2017/2018 год. Отборочный этап

Задачи для 11 класса



1. Круглый тоннель имеет внешний радиус $R = 200$ м и ширину $h = 30$ м. Можно ли повесить в нём шесть лампочек, освещающих весь тоннель?

2. Могут ли из первых ста членов арифметической прогрессии ровно 42 быть целыми числами?

3. В игре «Что? Где? Когда?» используется круглый барабан, разбитый на 13 секторов. Изначально в каждом секторе лежит вопрос. Стрелка, вращаясь случайным образом, указывает с равной вероятностью на любой из секторов. В каждом раунде игры задаётся вопрос из сектора, указанного стрелкой; но если этот вопрос уже задан, то используется следующий по часовой стрелке незаданный.
Пронумеруем вопросы по часовой стрелке от 1 до 13. Допустим, что после нескольких раундов заданы вопросы 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10. Для какого из оставшихся вопросов вероятность выпасть в одном из двух ближайших раундов максимальна? (Считайте, что ближайшие два раунда будут сыграны.)

4. Точка O — центр равностороннего треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки A и O, пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Докажите, что $AN = BM$.

5. Найдите какой-нибудь отличный от константы многочлен $P(t)$, для которого верно тождество $P(\sin x) = P(\cos x)$.

6. Точки числовой оси закрашены в 4 цвета. Соответствующие чётным числам — чёрные, нечётным — белые, на интервалах от чёрных к белым (по возрастанию) — красные, а на интервалах от белых к чёрным — синие. В стартовый момент времени два кузнечика находятся в разных точках A и B между 0 и 1. Через каждую единицу времени оба кузнечика совершают прыжок, удваивающий их координату (первый — в точки $2A$, $4A$, $8A$ и т. д., второй — в $2B$, $4B$, $8B$ и т. д.). Можно ли утверждать, что в некоторый момент времени кузнечики окажутся в точках, закрашенных в разные цвета?

7. Даны правильная призма и правильная бипирамида, основаниями каждой из них служит правильный 25-угольник. Для каждого из этих тел найдено максимально возможное количество вершин многоугольника, получаемого при сечении этого тела плоскостью. Для какого из тел результат больше? (Правильная бипирамида с основанием S — это объединение двух равных правильных пирамид с общим основанием S и вершинами по разные стороны от плоскости основания.)

8. Два вещественных числа a и b таковы, что $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$.
Докажите, что $4a^2 + 4b^2 - ab \geqslant 30$.