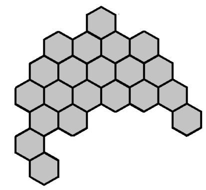
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2016/2017 год. Первый тур

Задачи для 5 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Покажите, как разрезать эту фигуру на три равных части.

   (Части называются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они совпали.)



2. Одно натуральное число на 1 больше другого. Может ли их произведение оканчиваться на 2017?

3. На столе лежат грузы массой 180, 181, 182, ..., 200 граммов (по одному грузу каждой массы). Можно ли выбрать несколько из них так, чтобы их суммарный вес равнялся 1 килограмму?

4. На доске написаны 20 нулей и 17 единиц. За один ход можно стереть любые два числа и вместо них записать их сумму. Ход называется важным, если полученное в результате этого хода число было больше, чем каждое из стёртых. Сколько важных ходов будет сделано, прежде чем на доске останется единственное число?

5. В пакете лежат несколько леденцов с разными вкусами, произведённых в разных странах. Любые два леденца в пакете различаются либо вкусом, либо страной производства, либо и тем и другим. Если два леденца в пакете различаются как по вкусу, так и по стране, то в пакете найдётся ровно один леденец, отличающийся от одного из них только вкусом, а от другого только страной. Известно, что в пакете ровно 5 леденцов со вкусом яблока и ровно 7 леденцов из России. Чему может быть равно число всех леденцов в пакете? Найдите все варианты ответа на вопрос.

6. Вдоль дороги стоят столбики, пронумерованные по порядку: 0, 1, 2, 3 и т.д. У столбика 0 стоит наездник на дрессированной лошади. Когда наездник называет натуральное число, лошадь прыгает вперёд к ближайшему столбику, номер которого делится на это число. Наездник назвал числа от 1 до 10 по одному разу в каком-то порядке. Каков максимально возможный номер столбика, у которого могла оказаться лошадь? Докажите, что он действительно максимален. (Пример: если наездник называет числа в порядке 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, то путь лошади таков: 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

7. Лиза хочет закрасить на доске 6×6 два квадрата разного размера так, чтобы их контуры шли по границам клеток и они не имели общих клеток. Сколькими способами она может это сделать? Способы, которые получаются друг из друга поворотом доски, считаются различными.

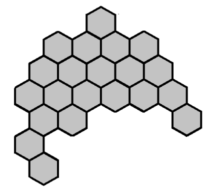
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2016/2017 год. Первый тур

Задачи для 6 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Покажите, как разрезать эту фигуру на три равных части.

   (Части называются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они совпали.)

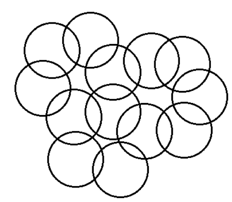


2. Одно натуральное число на 2 больше другого. Может ли их произведение оканчиваться на 2017?

3. Алексей решил купить два комплекта редких марок (для себя и друга). Один комплект состоит из трёх марок А, Б и В. В интернете он нашёл три магазина, но каждый из них продавал марки парами. Первый магазин продавал комплект «марка А + марка Б» за 200 рублей, второй продавал комплект «марка Б + марка В» за 300 рублей, а в третьем комплект «марка В + марка А» стоил x рублей. Алексей подсчитал минимальное количество денег, необходимое для покупки. Потом, однако, он подумал, что хотел бы посетить только два каких-нибудь магазина из этих трёх. Из-за этого условия минимально необходимое количество денег увеличилось на 120 рублей. Чему мог равняться x?

4. На плоскости расположены круги, как показано на рисунке.

   Внутри каждого круга поставлены три точки, а на границах кругов нет ни одной точки. Каково минимально возможное общее количество точек?



5. В пакете лежат несколько леденцов с разными вкусами, произведённых в разных странах. Любые два леденца в пакете различаются либо вкусом, либо страной производства, либо и тем и другим. Если два леденца в пакете различаются как по вкусу, так и по стране, то в пакете найдётся ровно один леденец, отличающийся от одного из них только вкусом, а от другого только страной. Известно, что в пакете ровно 5 леденцов со вкусом яблока и ровно 7 леденцов из России. Чему может быть равно число всех леденцов в пакете? Найдите все варианты ответа на вопрос.

6. Вдоль дороги стоят столбики, пронумерованные по порядку: 0, 1, 2, 3 и т.д. У столбика 0 стоит наездник на дрессированной лошади. Когда наездник называет натуральное число, лошадь прыгает вперёд к ближайшему столбику, номер которого делится на это число. Наездник назвал числа от 1 до 10 по одному разу в каком-то порядке. Каков максимально возможный номер столбика, у которого могла оказаться лошадь? Докажите, что он действительно максимален. (Пример: если наездник называет числа в порядке 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, то путь лошади таков: 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

7. Лиза хочет закрасить на доске 6×6 три квадрата так, чтобы их контуры шли по границам клеток, никакие два квадрата не имели общих клеток и у всех трёх квадратов был разный размер. Сколькими способами она может это сделать? Способы, которые получаются друг из друга поворотом доски, считаются различными.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2016/2017 год. Первый тур

Задачи для 7 класса

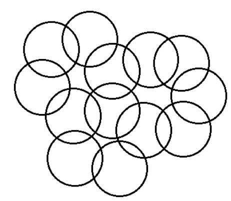
Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Может ли сумма 44 натуральных чисел быть в 4 раза больше, чем их произведение?

2. Одно натуральное число на 1 больше другого. Может ли их произведение оканчиваться на 2016?

3. Можно ли нарисовать три трегольника так, чтобы их пересечение и объединение были выпуклыми четырёхугольниками? Четырёхугольник называется выпуклым, если обе его диагонали проходят внутри него.

4. На плоскости расположены круги, как показано на рисунке. Внутри каждого круга поставлены три точки, а на границах кругов нет ни одной точки. Каково минимально возможное общее количество точек?



5. На столе лежат грузы массой 150, 151, 152, …, 200 граммов (по одному грузу каждой массы). Петя может выбрать один или несколько грузов и взвесить их. Сколько различных масс он может получить таким образом?

6. Лиза хочет закрасить на доске 6×6 три квадрата так, чтобы их контуры шли по границам клеток, никакие два квадрата не имели общих клеток и у всех трёх квадратов был разный размер. Сколькими способами она может это сделать? Способы, которые получаются друг из друга поворотом доски, считаются различными.

7. В школе для девочек любые две ученицы либо дружат, либо враждуют между собой. Школа называется успешной, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:
1) существуют 100 девочек $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ таких, что A_1 дружит с A_2, A_2 дружит с A_3, …, A_{99} дружит с A_{100};
2) существуют 7 девочек $B_1, \ldots, B_7$ таких, что B_1 враждует с B_2, B_3 — с B_4, а B_6 враждует с B_5 и B_7.
Найдите максимальное количество учениц, при котором школа может не оказаться успешной.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2016/2017 год. Первый тур

Задачи для 8 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Может ли сумма 44 натуральных чисел быть в 4 раза больше, чем их произведение?

2. Из книжки выпал фрагмент, состоящий из 96 листов (каждый лист — это пара страниц). Может ли сумма номеров всех этих страниц равняться 20170?

3. Пусть a, b, c, d, e, f — положительные числа. Какие значения может принимать выражение
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)}+\frac{cd}{(b+c)(d+e)}+\frac{ef}{(d+e)(f+a)}?$$

4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке E. Биссектрисы углов DAE и EBC пересекаются в точке F. Найдите величину угла AFB, если $ECFD$ — параллелограмм.

5. На столе лежат грузы массой 150, 151, 152, …, 200 граммов (по одному грузу каждой массы). Петя может выбрать один или несколько грузов и взвесить их. Сколько различных масс он может получить таким образом?

6. Три трегольника расположены так, что их пересечение и объединение — четырёхугольники. Могут ли эти два четырёхугольника иметь вместе 6 прямых углов?

7. В школе для девочек любые две ученицы либо дружат, либо враждуют между собой. Школа называется успешной, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:
1) существуют 100 девочек $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ таких, что A_1 дружит с A_2, A_2 дружит с A_3, …, A_{99} дружит с A_{100};
2) существуют 7 девочек $B_1, \ldots, B_7$ таких, что B_1 враждует с B_2, B_3 — с B_4, а B_6 враждует с B_5 и B_7.
Найдите максимальное количество учениц, при котором школа может не оказаться успешной.

Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2016/2017 год. Первый тур

Задачи для 9 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Из книжки выпал фрагмент, состоящий из 96 листов (каждый лист — это пара страниц). Может ли сумма номеров всех этих страниц равняться 20170?

2. Все вершины 789-угольника отмечены красным цветом, а внутри него лежат ещё 615 красных точек. Никакие три красных точки не лежат на одной прямой. Многоугольник разбит на треугольники, вершинами которых являются все красные точки, и только они. Сколько этих треугольников?

3. Пусть a, b, c, d, e, f — положительные числа. Какие значения может принимать выражение
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{ef}{(d+e)(f+a)}?$$

4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке E. Биссектрисы углов DAE и EBC пересекаются в точке F. Найдите величину угла AFB, если $ECFD$ — параллелограмм.

5. Диагонали граней почтового ящика равны 4, 6 и 7 дециметрам. Поместится ли мяч диаметром 2 дециметра в такой ящик?

6. Алексей решил купить три комплекта редких марок (для себя и двух друзей). Один комплект состоит из трёх марок А, Б и В. В интернете он нашёл три магазина, но каждый из них продавал марки парами. Первый магазин продавал комплект «марка А + марка Б» за 200 рублей, второй продавал комплект «марка Б + марка В» за 300 рублей, а в третьем комплект «марка В + марка А» стоил x рублей. Алексей подсчитал минимальное количество денег, необходимое для покупки. Потом, однако, он подумал, что хотел бы посетить только два каких-нибудь магазина из этих трёх. Из-за этого условия минимально необходимое количество денег увеличилось на 120 рублей. Чему мог равняться x?

7. Представьте двучлен $33x^4 + 578$ в виде суммы квадратов как можно меньшего числа многочленов с целыми коэффициентами.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2016/2017 год. Первый тур

Задачи для 10 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Все вершины 789-угольника отмечены красным цветом, а внутри него лежат ещё 615 красных точек. Никакие три красных точки не лежат на одной прямой. Многоугольник разбит на треугольники, вершинами которых являются все красные точки, и только они. Сколько этих треугольников?

2. Какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель чисел n^2+3 и $(n+1)^2+3$, где n — натуральное число?

3. Диагонали граней почтового ящика равны 4, 6 и 7 дециметрам. Поместится ли мяч диаметром 2 дециметра в такой ящик?

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y так, что $AX = BY$. При этом точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. B_1 — основание биссектрисы угла B. Докажите, что прямые XB_1 и YC параллельны.

5. Алексей решил купить три комплекта редких марок (для себя и двух друзей). Один комплект состоит из трёх марок А, Б и В. В интернете он нашёл три магазина, но каждый из них продавал марки парами. Первый магазин продавал комплект «марка А + марка Б» за 200 рублей, второй продавал комплект «марка Б + марка В» за 300 рублей, а в третьем комплект «марка В + марка А» стоил x рублей. Алексей подсчитал минимальное количество денег, необходимое для покупки. Потом, однако, он подумал, что хотел бы посетить только два каких-нибудь магазина из этих трёх. Из-за этого условия минимально необходимое количество денег увеличилось на 120 рублей. Чему мог равняться x?

6. Представьте двучлен $6x^4+5$ в виде суммы квадратов как можно большего числа многочленов с целыми коэффициентами.

7. Составители олимпиады голосованием определяют, какую из задач (А или Б) поместить в вариант. Для этого все составители по очереди (в алфавитном порядке) сообщают, какая из задач им больше нравится. В результате голосования оказалось, что задача А «победила» со счётом 11:5, причём в каждый момент она имела хотя бы вдвое больше голосов, чем задача Б. Сколькими способами могло проходить голосование?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2016/2017 год. Первый тур

Задачи для 11 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. При скольких натуральных n выполняется неравенство
$$\sin\frac{10\pi}{n} > \cos\frac{10\pi}{n}?$$

2. Какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель чисел n^2+3 и $(n+1)^2+3$, где n — натуральное число?

3. Назовём заслуженными числа вида 2^x+3^y , где x и y — натуральные числа или 0. Легко видеть, что числа $5 = 2^1+3^1 = 2^2+3^0$ и $11 = 2^3+3^1 = 2^1+3^2$ — дважды заслуженные (то есть представляются в таком виде двумя способами). А сколько всего существует дважды заслуженных чисел?

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y так, что $AX = BY$. При этом точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. B_1 — основание биссектрисы угла B. Докажите, что прямые XB_1 и YC параллельны.

5. Отец хочет отправить сыну 13 одинаковых мячиков. Для этого он купил почтовый ящик, диагонали граней которого равны 4, 6 и 7 дециметрам. Оказалось, что один мяч помещается в этот ящик. Верно ли, что в нём можно уместить все 13 мячей?

6. Составители олимпиады голосованием определяют, какую из задач (А или Б) поместить в вариант. Для этого все составители по очереди (в алфавитном порядке) сообщают, какая из задач им больше нравится. В результате голосования оказалось, что задача А «победила» со счётом 11:5, причём в каждый момент она имела хотя бы вдвое больше голосов, чем задача Б. Сколькими способами могло проходить голосование?

7. Существуют ли такие целые коэффициенты $a \neq 0, b, c, d$, для которых кубический многочлен $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ принимает каждое из значений 1, 2, 3 и 4 при каком-нибудь целом значении x?