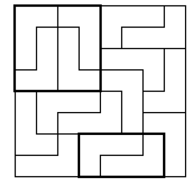
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Отборочный этап

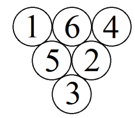
Задачи для 5 –6 классов

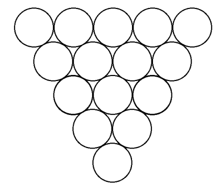
1. На рисунке показан квадрат 8×8, разрезанный на L-тетрамино (четырёхклеточные фигурки в форме буквы L). При этом некоторые из них образуют меньшие прямоугольники (два таких прямоугольника выделены на рисунке). Можно ли разрезать квадрат 8×8 на L-тетрамино таким образом, чтобы меньшие прямоугольники не образовывались? (*А. А. Теслер*)



2. Петя пишет поэму. В первый день он написал первые несколько строк, а в каждый следующий день дописывал на одну строку больше, чем дописал в предыдущий день (например, если в первый день он придумал 3 строки, то в конце второго дня поэма содержала 7 строк, а в конце третьего — 12).
а) Может ли в конце какого-то дня (не первого) количество строк в поэме оканчиваться цифрой 4?
б) Может ли в конце какого-то дня (не первого) количество строк в поэме оканчиваться цифрой 4, а в конце какого-то из следующих дней — цифрой 7? (*И. М. Туманова*)

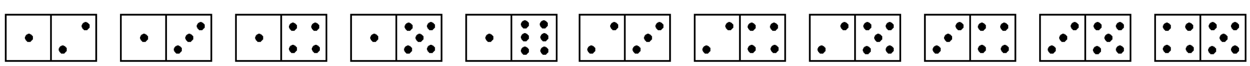
3. Назовём расположение чисел милым, если каждое число равно разности двух, стоящих над ним. Например, на рисунке слева показано милое расположение чисел от 1 до 6. Придумайте милое расположение чисел от 1 до 15 (каждое из них должно использоваться ровно один раз, образуя фигуру, нарисованную справа). (*А. Р. Араб*)





4. Петя и Вася играют в следующую игру. У них есть шоколадка 2019×2020 клеток, и каждым ходом игрок отламывает от неё прямоугольный кусок и съедает его (в результате остаётся тоже прямоугольник, состоящий из клеток, но меньшего размера). Начинает игру Петя, далее ходят по очереди. Побеждает тот, после чьего хода периметр шоколадки станет ровно 10. Кто из игроков может выиграть при любой игре соперника? Как ему надо для этого действовать? (*О. А. Пяйве*)

5. Дан набор костяшек домино, показанный на рисунке.



а) Можно ли составить из них всех цепочку по правилам домино?
б) Можно ли убрать одну костяшку из набора так, чтобы из всех остальных нельзя было сделать цепочку? (*А. А. Теслер*)

6. На одном острове живут четыре типа людей: рыцари (не могут произносить ложных утверждений), лжецы (не могут произносить истинных утверждений), обычные люди (могут говорить всё что угодно) и бояки (не делают вообще никаких утверждений). Однажды собрались несколько человек, и каждый из них произнёс одну из следующих фраз: «Кто вы?», «Я рыцарь», «Я лжец», «Я обычный», «Я бояка». Каждую фразу произнесли ровно по 10 человек. Могут ли рыцари оказаться самым многочисленным типом людей в этой компании? (*А. А. Теслер*)

7. ***Только для 5 класса.*** Даны три сосуда. Первый сосуд наполнен водой, а второй и третий пусты. В 12:00 из первого сосуда начинает литься вода во второй и третий, причём во второй поступает 2 литра в минуту, а в третий 4 литра в минуту. В 13:00 объём воды в первом и втором сосудах сравнялся. Во сколько первый сосуд опустеет? (*А. А. Теслер*)

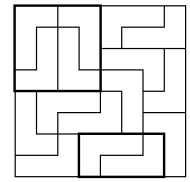
Только для 6 класса. В магазине есть три сорта чая: зелёный, чёрный и фруктовый. Вначале количество пачек разных сортов относилось как $4 : 5 : 8$. После недели продаж и новой поставки это соотношение изменилось и стало $5 : 7 : 12$. Известно, что число пачек фруктового чая возросло на 60%, а зелёного увеличилось не более чем на 20 пачек. Сколько всего пачек чая было в магазине вначале? (*Л. С. Корешкова*)

- Срок проведения отборочного тура олимпиады — **с 15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в феврале–марте 2020 года.
- Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
- Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). Подробнее см. на странице `formulo.org/ru/olymp/2019-math-ru/`.
- В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.
- Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Отборочный этап

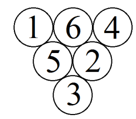
Задачи для 7 класса

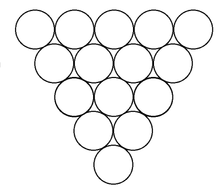
1. На рисунке показан квадрат 8×8, разрезанный на L-тетрамино (четырёхклеточные фигурки в форме буквы L). При этом некоторые из них образуют меньшие прямоугольники (два таких прямоугольника выделены на рисунке). Можно ли разрезать квадрат 8×8 на L-тетрамино таким образом, чтобы меньшие прямоугольники не образовывались? (*А. А. Теслер*)



2. Петя пишет поэму. В первый день он написал первые несколько строк, а в каждый следующий день дописывал на одну строку больше, чем дописал в предыдущий день (например, если в первый день он придумал 3 строки, то в конце второго дня поэма содержала 7 строк, а в конце третьего — 12).
а) Может ли в конце какого-то дня (не первого) количество строк в поэме оканчиваться цифрой 4?
б) Может ли в конце какого-то дня (не первого) количество строк в поэме оканчиваться цифрой 4, а в конце какого-то из следующих дней — цифрой 7? (*И. М. Туманова*)

3. Назовём расположение чисел милым, если каждое число равно разности двух, стоящих над ним. Например, на рисунке слева показано милое расположение чисел от 1 до 6. Придумайте милое расположение чисел от 1 до 15 (каждое из них должно использоваться ровно один раз, образуя фигуру, нарисованную справа). (*А. Р. Араб*)





4. В магазине есть три сорта чая: зелёный, чёрный и фруктовый. Вначале количество пачек разных сортов относилось как $4 : 5 : 8$. После недели продаж и новой поставки это соотношение изменилось и стало $5 : 7 : 12$. Известно, что число пачек фруктового чая возросло на 60%, а зелёного увеличилось не более чем на 20 пачек. Сколько всего пачек чая было в магазине вначале? (*Л. С. Корешкова*)

5. Имеется два резервуара, каждый из которых вмещает 2020 м^3 воды. В полночь в первом резервуаре 100 м^3 воды, а второй заполнен целиком. В первый резервуар каждый час поступает 110 м^3 воды (пока он не заполнится), а из второго каждый час выкачивают 50 м^3 (пока он не опустеет). В какие моменты времени разница между объёмами воды в резервуарах будет составлять половину первоначальной? (*И. Ж. Ибатулин*)

6. У Гарри Поттера есть коробка размерами $10 \times 10 \times 10$ сантиметров и волшебный аппарат. Если поместить коробку в аппарат, то одно из её измерений (длина, ширина или высота) увеличивается на 50%, а каждое из двух других уменьшается на 20%. Может ли у Гарри после нескольких применений аппарата получиться коробка $20 \times 20 \times 20$ сантиметров? (*А. А. Теслер*)

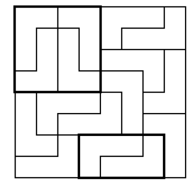
7. На одном острове живут четыре типа людей: рыцари (не могут произносить ложных утверждений), лжецы (не могут произносить истинных утверждений), обычные люди (могут говорить всё что угодно) и бояки (не делают вообще никаких утверждений). Однажды собрались несколько человек, и каждый из них сказал одну из следующих фраз: «Кто вы?», «Я рыцарь», «Я лжец», «Я обычный», «Я бояка». Каждую фразу произнесли ровно по 6 человек. Известно, что людей всех типов было разное и ненулевое количество. Больше всего было рыцарей. А сколько именно? (Найдите все возможные варианты ответа на этот вопрос и докажите, что других нет.) (*А. А. Теслер*)

- Срок проведения отборочного тура олимпиады — **с 15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в феврале–марте 2020 года.
- Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
- Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). Подробнее см. на странице formulo.org/ru/olymp/2019-math-ru/.
- В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.
- Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 8 класса

1. На рисунке показан квадрат 8×8, разрезанный на L-тетрамино (четырёхклеточные фигурки в форме буквы L). При этом некоторые из них образуют меньшие прямоугольники (два таких прямоугольника выделены на рисунке). Можно ли разрезать квадрат 8×8 на L-тетрамино таким образом, чтобы меньшие прямоугольники не образовывались? (*А. А. Теслер*)



2. В магазине есть три сорта чая: зелёный, чёрный и фруктовый. Вначале количество пачек разных сортов относилось как $4 : 5 : 8$. После недели продаж и новой поставки это соотношение изменилось и стало $5 : 7 : 12$. Известно, что число пачек фруктового чая возросло на 60%, а зелёного увеличилось не более чем на 20 пачек. Сколько всего пачек чая было в магазине вначале? (*Л. С. Корешкова*)

3. Два хакера создали разные программы для анализа степени изменения чисел при некоторых действиях.
Первая программа за один цикл умножает любое натуральное число на 3, а затем отнимает от результата его сумму цифр; далее с новым результатом повторяется 7 таких же циклов. Итоговый результат работы программы первого хакера — отношение полученного результата к исходному числу.
Программа второго хакера берёт число, состоящее только из девяток, и за один цикл делит это число на сумму цифр, если оно делится, а в противном случае отнимает сумму цифр; далее с результатом повторяются 7 таких же циклов. Итоговый результат работы программы второго хакера — отношение исходного числа к полученному результату.
Хакеры решили сыграть в игру: каждый придумывает себе изначальное число; у кого итоговый результат больше, тот и победил. Кто из хакеров сумеет победить при любой игре соперника? (*И. Ж. Ибатулин*)

4. Имеется два резервуара, каждый из которых вмещает 2020 м^3 воды. В полночь в первом резервуаре 100 м^3 воды, а второй заполнен целиком. В первый резервуар каждый час поступает 110 м^3 воды (пока он не заполнится), а из второго каждый час выкачивают 50 м^3 (пока он не опустеет). В какие моменты времени разница между объёмами воды в резервуарах будет составлять половину первоначальной? (*И. Ж. Ибатулин*)

5. ABC и CDE — равнобедренные прямоугольные треугольники с гипотенузами $BC = 7$ и $CE = 14$. C лежит на отрезке BE, а точки A и D лежат по одну сторону от прямой BE. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ODE. (*А. Р. Араб*)

6. На одном острове живут четыре типа людей: рыцари (не могут произносить ложных утверждений), лжецы (не могут произносить истинных утверждений), обычные люди (могут говорить всё что угодно) и бояки (не делают вообще никаких утверждений). Однажды собрались несколько человек, и каждый из них сказал одну из следующих фраз: «Кто вы?», «Я рыцарь», «Я лжец», «Я обычный», «Я бояка». Каждую фразу произнесли ровно по 6 человек. Известно, что людей всех типов было разное и ненулевое количество. Больше всего было рыцарей. А сколько именно? (Найдите все возможные варианты ответа на этот вопрос и докажите, что других нет.) (*А. А. Теслер*)

7. Стол имеет форму квадрата со стороной 1 метр. На нём лежат, не накладываясь, 12 монет радиуса 1 см. Докажите, что можно выбрать 4 различных монеты с центрами A, B, C, D, таким образом, что $1 \leqslant CD : AB < 1{,}1$ или $1 \leqslant AC : AB < 1{,}1$. (*А. А. Теслер*)

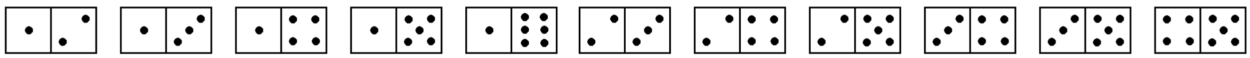
• Срок проведения отборочного тура олимпиады — **с 15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в феврале–марте 2020 года.
• Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
• Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). Подробнее см. на странице formulo.org/ru/olymp/2019-math-ru/.
• В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.
• Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 9 класса

1. В магазине есть три сорта чая: зелёный, чёрный и фруктовый. Вначале количество пачек разных сортов относилось как 4 : 5 : 8. После недели продаж и новой поставки это соотношение изменилось и стало 5 : 7 : 12. Известно, что число пачек фруктового чая возросло на 60%, а зелёного увеличилось не более чем на 20 пачек. Сколько всего пачек чая было в магазине вначале? (*Л. С. Корешкова*)

2. Дан набор костяшек домино, показанный на рисунке.



а) Можно ли составить из них всех цепочку по правилам домино?

б) Можно ли убрать одну костяшку из набора так, чтобы из всех остальных нельзя было сделать цепочку? (*А. А. Теслер*)

3. Имеется два резервуара, каждый из которых вмещает 2020 м^3 воды. В полночь в первом резервуаре 100 м^3 воды, а второй заполнен целиком. В первый резервуар каждый час поступает 110 м^3 воды (пока он не заполнится), а из второго каждый час выкачивают 50 м^3 (пока он не опустеет). В какие моменты времени разница между объёмами воды в резервуарах будет составлять половину первоначальной? (*И. Ж. Ибатулин*)

4. В окружность диаметра 5 вписан треугольник, все стороны которого имеют целые длины. Найдите его периметр (укажите все возможные варианты и докажите, что других нет). (*П. Д. Муленко*)

5. Существуют ли такие различные натуральные числа a, b, x и y, что x записывается в системе счисления с основанием a точно так же, как y записывается в системе счисления с основанием b, и наоборот (x записывается в системе счисления с основанием b точно так же, как y записывается в системе счисления с основанием a)? (*В. П. Федотов*)

6. Стол имеет форму квадрата со стороной 1 метр. На нём лежат, не накладываясь, 12 монет радиуса 1 см. Докажите, что можно выбрать 4 различных монеты с центрами A, B, C, D, таким образом, что $1 \leqslant CD : AB < 1{,}1$ или $1 \leqslant AC : AB < 1{,}1$. (*А. А. Теслер*)

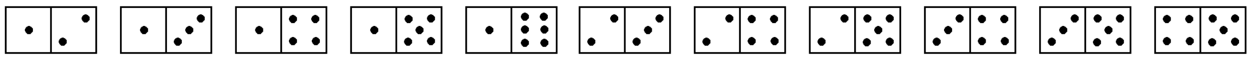
7. Пусть a и b — два вещественных числа, причём $2a^3 + 2b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 60ab = 16000$. Найдите все возможные значения $a + b$. (*А. Р. Араб*)

• Срок проведения отборочного тура олимпиады — **с 15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в феврале–марте 2020 года.
• Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
• Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). Подробнее см. на странице formulo.org/ru/olymp/2019-math-ru/.
• В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.
• Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 10 – 11 классов

1. Дан набор костяшек домино, показанный на рисунке.



а) Можно ли составить из них всех цепочку по правилам домино?

б) Можно ли убрать одну костяшку из набора так, чтобы из всех остальных нельзя было сделать цепочку? (*А. А. Теслер*)

2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$ на стороне AC отмечена такая точка M, что вписанные окружности треугольников ABM и BCM имеют общую точку. Найдите отношение площадей этих треугольников. (*Л. С. Корешкова*)

3. На одном острове живут четыре типа людей: рыцари (не могут произносить ложных утверждений), лжецы (не могут произносить истинных утверждений), обычные люди (могут говорить всё что угодно) и бояки (не делают вообще никаких утверждений). Однажды собрались несколько человек, и каждый из них сказал одну из следующих фраз: «Кто вы?», «Я рыцарь», «Я лжец», «Я обычный», «Я бояка». Каждую фразу произнесли ровно по 6 человек. Известно, что людей всех типов было разное и ненулевое количество. Больше всего было рыцарей. А сколько именно? (Найдите все возможные варианты ответа на этот вопрос и докажите, что других нет.) (*А. А. Теслер*)

4. Поверхность деревянного куба с ребром 1 метр покрашена краской. От каждого его угла отпилили пирамиду, в результате остался 14-гранник, все покрашенные грани которого — прямоугольники, а все непокрашенные — правильные треугольники (не обязательно одинаковые). Найдите общую площадь окрашенной поверхности этого 14-гранника, если она в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем общая площадь его неокрашенной поверхности. (*А. А. Теслер*)

5. По команде k роботы Девяткин и Десяткин выписывают все натуральные числа от 1 до $37k$. Затем Девяткин ищет среди них число, в десятичной записи которого больше всего цифр 9, а Десяткин — число с наибольшим количеством нулей. Если у кого-то из них нужных цифр окажется больше, то ему присуждают очко. С каким счётом закончится матч, если он состоит из последовательного исполнения команд k...

(а) для k от 1 до 2019; (б) для k от 1 до 10^{2019}? (*В. П. Федотов*)

6. Можно ли вместо пропусков поставить семь последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы равенство $(x - \_)(x - \_)(x - \_) = (x - \_)(x - \_)(x - \_) + \_$ выполнялось при всех x? (*А. А. Теслер*)

7. Имеются три бассейна. Из первого с постоянной скоростью выливается вода, а во второй и третий бассейны вода поступает с постоянными скоростями. Изначально в первом бассейне было столько же воды, сколько в двух других в сумме; через некоторое время во втором бассейне стало столько же воды, сколько в двух других в сумме; ещё через какое-то время в третьем бассейне стало столько же воды, сколько в первых двух в сумме. Возможно ли, что ни в начале, ни в конце этого промежутка времени ни один из бассейнов не был пустым? (*А. А. Теслер*)

• Срок проведения отборочного тура олимпиады — **с 15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в феврале–марте 2020 года.
• Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
• Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). Подробнее см. на странице `formulo.org/ru/olymp/2019-math-ru/`.
• В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.
• Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.